Leçon 156 : Exponentielle de matrices. Applications.

Développements :

Surjectivité de l'exponentielle matricielle, L'exponentielle induit un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ sur $S_n(\mathbb{R})^{++}$.

Bibliographie :

Berthelin, Gourdon, Rombaldi, H2G2, FGN, Zavidovic, OA.

Rapport du jury 2016 :

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. La distinction entre le cas réel et complexe doit être clairement évoqué. Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de exp(A) trouve toute son utilité dans cette leçon. Notons que l'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si l'on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités. Les applications aux équations différentielles doivent être évoquées sans constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement. S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $GL_n(\mathbb{R})$) ou vers les algèbres de Lie.

Rapport du jury 2017 :

Bien que ce ne soit pas une leçon d'analyse, il faut toutefois pouvoir justifier clairement la convergence de la série exponentielle. La distinction entre le cas réel et complexe doit être clairement évoqué. Les questions de surjectivité ou d'injectivité doivent être abordées. Par exemple la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La matrice définie par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle l'exponentielle d'une matrice à coefficients réels ? La décomposition de Dunford multiplicative (décomposition de Jordan) de $\exp(A)$ trouve toute son utilité dans cette leçon. Notons que l'exponentielle fait bon ménage avec la décomposition polaire dans bon nombre de problèmes sur les sous-groupes du groupe linéaire. L'étude du logarithme (quand il est défini) trouve toute sa place dans cette leçon. Si l'on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra évoquer le calcul sur les développements limités. Les applications aux équations différentielles méritent d'être présentées sans toutefois constituer l'essentiel de la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique, mais le jury déconseille aux candidats de proposer ce thème dans un développement de cette leçon, sauf à avoir bien compris comment les apports algébriques permettent ici de simplifier les conclusions analytiques. S'ils le désirent, les candidats peuvent s'aventurer vers les sous-groupes à un paramètre du groupe linéaire (on peut alors voir si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $GL_n(\mathbb{R})$ vers les algèbres de Lie.

Remarque 1. *On se place sur $M_n(K)$ avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, que l'on munit d'une norme de K-algèbre.*

1 Exponentielle de matrices

1.1 La série exponentielle

Proposition 2 (Romb p747)**.** *Pour tout $A \in M_n(K)$, $\sum A^k/k!$ est convergente. (rajouter normalement ?)*

Définition 3 (Romb p747)**.** *Sa somme est appelée exponentielle de A et notée* $\exp(A)$.

Proposition 4 (Romb p747)**.** exp *est continue.*

Proposition 5 (Romb p747)**.** $||\exp(A)|| \leq \exp(||A||)$.

Proposition 6 (Romb p747)**.** $\exp(A)$ *est un polynôme en A, donc commute avec A.*

Remarque 7 (Romb p758)**.** *Il n'existe pas de polynôme P tel que pour tout $A \in M_n(K)$, $P(A) = \exp(A)$.*

Proposition 8 (Romb p747)**.** *Si A est nilpotente d'ordre q, la somme s'arrête à $q-1$. Cas particulier de* $\exp(0)$.

Proposition 9 (Romb p747)**.** *Exponentielle d'une matrice diagonale.*

Remarque 10. *Résultat plus général pour une matrice diagonale par blocs.*

Proposition 11 (Romb p747)**.** *Si $B = PAP^{-1}$ alors* $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.

Application 12 (FGN alg2 p243)**.** *[Romb p763] Si A et B sont diagonalisables et* $\exp(A) = \exp(B)$ *alors $A = B$. (*$\exp$ *est injective sur* $D_n(\mathbb{R})$*.)*

Contre exemple 13 (Romb p758)**.** $\exp(\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ *avec* $\theta = 2\pi$
$\begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}$ *non semblable à la matrice nulle mais l'exp de cette matrice est semblable à* I_2.

Proposition 14 (Romb p748)**.** *Si A est diagonalisable de valeurs propres* $\lambda_1, ...\lambda_n$ *alors* $\exp(A)$ *est diagonalisable de valeurs propres* $\exp(\lambda_1), ... \exp(\lambda_n)$.

Proposition 15 (Romb p748)**.** $t \mapsto \exp(tA)$ *est* C^∞ *sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée* $t \mapsto \exp(tA)A$.

Proposition 16 (Romb p748)**.** $det(\exp(A)) = \exp(tr(A))$ *et* $\exp(A)$ *est inversible.*

Remarque 17 (Romb p748)**.** $\exp : M_n(K) \to GL_n(K)$. *Si* $K = \mathbb{R}$, $\exp : M_n(\mathbb{R}) \to GL_n^+(\mathbb{R})$ *donc n'est pas surjective.*

Remarque 18 (Gourdon p186)**.** *Si M est l'exponentielle d'une matrice réelle alors* $\det(M) > 0$.

Contre exemple 19 (Gourdon p186)**.** *[Romb p765]* $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 20 (Romb p750)**.** *[Gourdon p184] Si A et B commutent alors* $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. *Donner le théorème plus complet ?*

Proposition 21 (Romb p749)**.** $\exp(A)$ *est inversible d'inverse* $\exp(-A)$.

Application 22 (Romb p750)**.** *Solutions de* $Y' = AY$.

Contre exemple 23 (Romb p758)**.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque 24. *Parler ensuite de l'inverse de* $\exp(A)$ *?*

Proposition 25 (H2G2)**.** $\exp(A^t) = \exp(A)^t$ *et* $\exp(\overline{A}) = \overline{\exp(A)}$.

Proposition 26 (Zavidovique)**.** *[H2G2]* $\exp : (K[A], +) \to (K[A] \cap GL_n(K), .)$ *est un morphisme de groupes.*

Proposition 27 (Romb exo)**.** $\exp(A) = \lim(I_n + A/k)^k$.

Remarque 28. *Faire des sous-parties ? Avec le lien avec les polynômes par exemple ? cf minerve 2017)*

1.2 Méthodes de calcul

Utilisation de la décomposition de Jordan

Remarque 29. *On se ramène à similitude près à une forme diagonale par blocs, l'exponentielle préservant l'écriture diagonale par blocs, puis on calcule l'exponentielle de chaque bloc.*

Remarque 30. *Parler plutôt ici de l'exponentielle d'une matrice diagonale, diagonalisable ?*

Définition 31. *Bloc de Jordan.*

Proposition 32 (Berth p48)**.** *Exponentielle d'un bloc de Jordan.*

Théoreme 33 (Gourdon)**.** *Réduction de Jordan.*

Proposition 34 (Berth p50)**.** *Exponentielle d'une matrice à l'aide de la réduction de Jordan.*

Exemple 35 (Berth p52)**.** $\exp(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exemple 36 (Romb p761)**.** $\exp(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \exp(a) \begin{pmatrix} \cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{pmatrix}$.

Remarque 37. *On obtient la forme de Jordan de M en déterminant les valeurs propres λ_i de M, puis en étudiant la restriction des endomorphismes* $M - \lambda_i I_n$ *à* $Ker((M - \lambda_i I_n)^n)$*, qui sont des endomorphismes nilpotents, et en trouvant une base de chaque sev dans laquelle chaque endomorphisme nilpotent est dans sa forme de Jordan.*

Utilisation de la décomposition de Dunford

Théoreme 38 (Romb)**.** *[Gourd] Décomposition de Dunford.*

Remarque 39. *C'est dur en général d'obtenir la décomposition de Dunford de A.*

Proposition 40 (Romb p750-751)**.** *On a* $\exp(A) = \exp(D)\exp(V)$ *et la décomposition de Dunford de* $\exp(A)$ *est donnée par* $\exp(A) = \exp(D = + \exp(D)(\exp(V) - I_n)$.

Remarque 41 (Romb p751)**.** *On retrouve le fait que* $\exp(A)$ *est un polynôme en A si χ_A est scindé.*

Proposition 42 (Romb p752)**.** *Expression de* $\exp(A)$ *en fonction des valeurs propres de A et de ses projecteurs spectraux.*

Exemple 43 (Gourdon p199)**.** *Un exemple de calcul.*

Application 44 (Romb p752)**.** *Si χ_A est scindé, A est diagonalisable si et seulement si* $\exp(A)$ *l'est.*

Application 45 (OA p215). *[Romb p766]* $\exp(A) = I_n$ *si et seulement si A est diagonalisable et* $Sp(A) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$.

Application 46 (Gourdon p200). $exp(tM) \to 0$ *lorsque* $t \to +\infty$ *si et seulement si* $Sp(M) \subset R_-^*$.

Proposition 47 (OA p174). *Homéomorphisme entre les nilpotents et les unipotents via l'exponentielle.*

2 Exponentielle et topologie

2.1 Différentiabilité/régularité de l'exponentielle

Proposition 48 (Romb p748). *Différentielle de l'exponentielle.*

Remarque 49. *En particulier,* $d\exp(0) = I_n$.

Proposition 50. $\exp : M_n \to GL_n$ *est* $\mathbb{C}_\infty$.

Corollaire 51. *Si H commute avec A,* $D_A(\exp)(H) = \exp(A).H$.

Proposition 52 (MT). *[Romb p760]* exp *réalise un difféomorphisme d'un voisinage de* 0 *dans un voisinage de Id.*

Application 53. GL_n *n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit.*

Proposition 54. $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ *est un homéomorphisme.*

Application 55 (H2G2 p358). $GL_n(\mathbb{R}) \simeq O_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$.

Proposition 56. *Etude de* $O_{p,q}$.

2.2 Surjectivité

Remarque 57. *On rappelle que l'exponentielle n'est pas injective sur* $M_n(\mathbb{R})$ *dès que* $n \geq 2$ *ou* $M_n(\mathbb{C})$ *dès que* $n \geq 1$.

Remarque 58. *Le* C^1*-difféo ne peut pas être global.*

Proposition 59 (Zavi). *Surjectivité de l'exponentielle.*

Application 60. *Image de l'exponentielle réelle.*

Corollaire 61 (Gourdon ?). *[Romb p756]* $\forall B \in Gl_n(\mathbb{C}), \forall p \in \mathbb{R}^*$, *il existe* $A \in M_n(\mathbb{C})$, *polynomiale en B tel que* $B = A^p$

Contre exemple 62 (Romb p766). *Si* $B = N_n$, *il n'y a aucunA tel que* $B = A^r$ *pour tout* $r \in \mathbb{N}, r \geq 2$.

Proposition 63 (FGN alg3). $\exp : A_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ *est surjective.*

3 Applications en calcul différentiel

3.1 Cas des coefficients constants

Proposition 64 (Berth p47). *L'unique solution de* $Y' = AY$ *vérifiant* $Y(t_0) = Y_0$ *est donnée par :* $Y(t) = \exp((t - t_0)A)Y_0$.

Exemple 65 (Berth p53). $x' = 2x + y, y' = 2y$.

Proposition 66 (Berth p54). *Formule de Duhamel pour A constant.*

Proposition 67 (FGN). *Les morphismes continus de* $(\mathbb{R}, +)$ *dans* $GL_n(\mathbb{C})$ *sont les* $t \mapsto e^{tA}$ *pour* $A \in M_n(\mathbb{C})$.

3.2 Théorème de stabilité

Définition 68. *Stabilité et stabilité asymptotique des solutions d'une équation différentielle.*

Théoreme 69 (Berth p239). *Théorème de stabilité dans le cas linéaire à coefficients constants. Soient* $\lambda_1, .., \lambda_m$ *les valeurs propres complexes de la matrice A. Alors les solutions de* $Y' = AY$ *sont :*
(1) asymptotiquement stables si et seulement si $Re(Spec(A)) \subset]-\infty, 0[$.
(2) stables si et seulement si pour tout $j \in [[1, m]]$, *ou bien* $Re(\lambda_j) < 0$*ou bien* $Re(\lambda_j) = 0$ *et* $dim(E_{\lambda_j}) = Mult(\lambda_j, CA(X))$.

Exemple 70. *Un exemple d'application du théorème.*

Remarque 71. *Dessin en annexe pour la dimension 2*

Théoreme 72. *Théorème de Lyapunov ?*

Remarque 73. *Rapport : lien entre réduction et comportement asymptotique. ?*